/// やりたいこと ///

情報幾何学で用いられてる数学で

「とある現象」

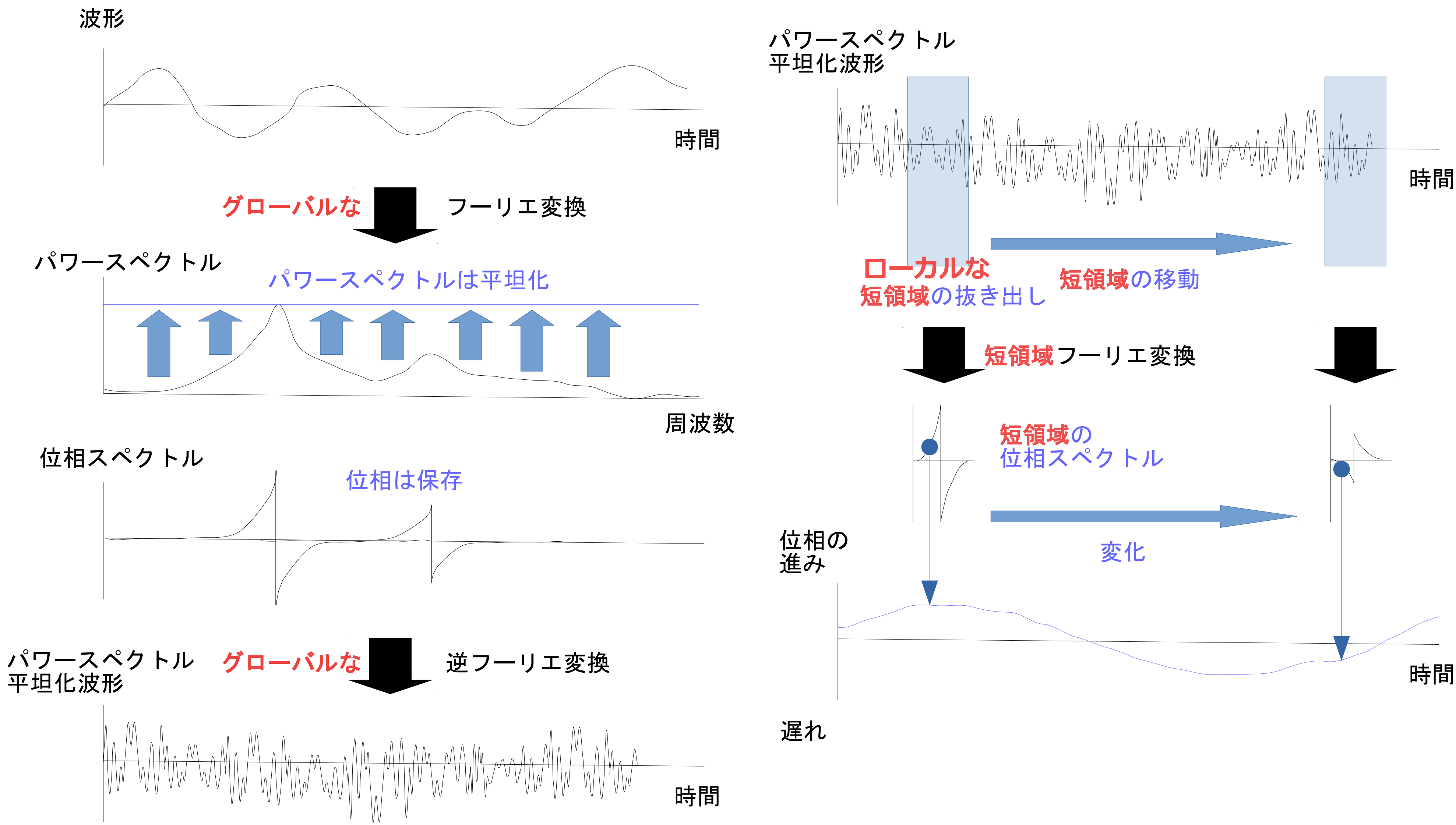
を説明したい

/// SigProcRandWalk:SPRW ///

普段は線形空間で
画像処理や信号処理
をやってます

/// 「とある現象」とは ///

/// 「情報幾何学の基礎」の読書会にて ///



・原信号に多項式で表される非線形特性が作用していれば

--- 上の処理により ---

・超解像（失われた帯域の回復）と

・非線形性の除去（高調波歪と混変調歪の除去）ができる

シミュレーション実験では確認済

/// 「とある現象」の効果について ///

・超解像（失われた帯域の回復）
・非線形性の除去（高調波歪と混変調歪の除去）

上の二つは、画像処理や信号処理に関わる人間の興味を惹きつける言葉であることは間違いない（これらは帯域と線形性という処理の性能に関わる基本的な事項なので）。
かつ、詳細な説明を聞く前の最初の反応は「うーん、本当かな？」であることが多く、難易度の高い話であることも伺える。

検索してもあまり多くの情報は出てこないが、それは難易度が高いが故に、今までは実用的な成果が出てないから。
仮に、応用が容易な条件下で現実的な解決策が示されれば、インパクトのある話であることは間違いない。

/// 何故、情報幾何学なのか？ ///

今のところ「キーワード」が似てるとしか言えない（-_-;;

「とある現象」

・線形空間内に多項式で表される
非線形特性を持つデータがある
場合に

・グローバルな処理と
・ローカルな処理と
上のローカルな処理は連なってて、
更に微分（隣との差分）を行う

を組み合わせると

・超解像（失われた帯域の回復）と
・非線形性の除去
（高調波歪と混変調歪の除去）

ができる

似てる
気がする

「情報幾何学」

・グローバルな空間と
・ローカルな空間と

があって

・ローカルな空間は連なってる
・グローバルな空間は曲がって
てもよい

/// 今後のこと ///

・まず「とある現象」の定式化

・式を変形させ、効果（超解像
と非線形性の除去）の説明

次頁以降の /// おまけ /// で

線形空間で使われてる画像処理や信号処理のテクニックは、「情報幾何学」と組み合わせることで、非線形性の強いデータや曲がった空間で使えるよう拡張できるのではないか？
（ NN が DL に拡張されたように）

と書いたが、これが言えるようなら、

「とある現象」は「情報幾何学」応用の一例であり実例であると説明できるようにしたい

/// SigProcRandWalk:SPRW ///
[https://connpass.com/user/SigProcRandWalk/]

/// おまけ ///

（第 3 回の読書会に寄せたコメントを再掲します）

普段は線形空間内で画像処理や信号処理をやっている「 SigProcRandWalk ： SPRW 」
と申します。自分は今回の読書会を通じていろいろなヒントをいただけてるように
思いまして、せっかくなので今のところの考えをまとめてコメントにしようと思いました。

普段関係してる分野から、線形空間に注目して読書会当日の内容を振り返ったのですが、
まず「グラフ（座標系）の埋め込み方」に関して、前半と後半で「グラフの決め方」が
違うのかなと思いました。

［前半の話］
「 6 個のグラフを埋め込んで大域的な空間をカバーする」や
「 2 個のグラフを埋め込んで大域的な空間をカバーする」など。
上のグラフは線形空間であるという言及はない（おそらく線形ではない）。
なぜかグラフの数は少ないほうが良いという雰囲気がある（［後半の話］とは真逆）。

［後半（接ベクトルの説明以降）の話］
「接ベクトルで決まる局所的な線形空間をグラフとして埋め込み
　大域的な空間をカバーする。ただし、大域的な空間をカバー
　するには上記のグラフが多数必要。おそらく無限個」

（次頁に続く）

（前頁から続く）

前半の話に発展性があるかは分かりませんが、後半の話には次のようなことができる可能性があり、面白いなと思いました。

「局所的な線形空間が多数あることで、大域的な空間をカバーできる。線形空間は曲がってないので、大域的な空間が曲がってる場合には、その曲がりの影響は多数ある局所的な線形空間同士の関係性に表れてなければならない（例えば隣接する局所的空間同士の一階微分、二階微分、三階微分…などや、その他の関係）」

線形空間であれば、使用できる多くのテクニック（例えば、フーリエ変換やその他の直交変換や線形変換、固有値分解、分類空間の設計、線形予測、など）がありますが、これらのテクニックを曲がった空間内で用いるとおそらく曲がってる分だけ誤差が増大するはずです。
そこで、

「局所的な線形空間の各々に対して上記のテクニックを作用させ、何らかの情報（周波数に応じたパワーや位相だったり、固有値だったり、分類対象の統計値だったり、予測値だったり）を取り出した後に、局所的な線形空間同士の関係を用いて、上記の情報を大域的空間に埋め込む」

と考えてみます（上記のテクニックが線形代数で記述されてれば大丈夫そうな気がします）。

（次頁に続く）

/// おまけ ///

（前頁から続く）

上が可能であれば、線形空間で使用できてた上記の各種テクニックを、曲がった空間にも適用できるように拡張できたことになります。
線形空間で行われる処理には歴史があり馴染み深い道具箱という感じがありますが、これらを曲がった空間用にまとめて拡張でき（各々の処理向けに微調整が必要でも）、そのためのフレームワークのような役割が「情報幾何学」にあるのなら、インパクトのある話だなと思います。

また上記の各種テクニックを、深層でないニューラル・ネットワーク（線形性の強いデータ、線形空間、では性能が出やすい）に置き換えれば、深層学習の非線形性に対する性能を説明するのに「情報幾何学」の利用が考えられてる理由が垣間見えて面白いなと思いました。歴史的には、

90 年代　深層でない NN　⇔　線形空間での上記各種テクニック　性能的には同等
10 年代　深層学習の台頭　非線形性での性能向上？　一歩前進

と、現状で性能的には機械学習の方が一歩リードしてます。

20 年代？　深層学習　⇔　上記各種テクニックの非線形性への拡張
深層学習の非線形性に対する性能向上が「情報幾何学」を論拠とするなら、
「情報幾何学」を用いて非線形性対応に拡張した上記各種テクニックは、
性能面で深層学習に追いつける可能性がある。

となったら話としては面白いですが、どうでしょうか。
（おわり）